Утверждены
на заседании Центральной предметно-методической комиссии
Всероссийской олимпиады школьников по математике

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников в 2017/2018 учебном году по математике

Содержание

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013 г., с изменениями № 249 от 17 марта 2015 г., № 1488 от 17 декабря 2015 г.), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам. Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. Данные задачи предлагались на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны или включены в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017/2018 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике.

Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет ее с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся **4-11 классов**.

В соответствии с разделом III Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4-11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4 класса – 1-2 урока, для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 3-4 урока.

Согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призеров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором школьного этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.

2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.
6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в начальном и среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 4-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.
7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

8. В задания для учащихся 4-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать. Допускается выписывание условий заданий на доску.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий школьного этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

IV-V КЛАССЫ

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Четность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания школьного этапа олимпиады

Ниже приведены примеры типовых задач школьного этапа олимпиады с указанием примерной сложности для соответствующего класса. Задания разбиты по основным темам.

Арифметика, числовые ребусы

(5-6 класс, легкая). Расставьте скобки в выражении 7 – 6 – 5 – 4 – 3– 2 – 1 = 0 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. Например, скобки можно расставить так: (7 – 6) – (5 – 4) – (3 – 2 – 1) = 0.

(4-5 класс, средняя). Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + ** + **= 296.

Ответ. 99+99+98=296.

(6-7 класс, легкая). Найдите решение числового ребуса $a,bb+b,ab=10$, где a и b – различные цифры.

Ответ. 4,55+5,45=10.

(7-8 класс, средняя). В ребусе *AAAAA*+*BBBB*+*CCC*+*DD*+*E* = 66067 одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры. Найдите *E*.

Ответ. 3.

(7-8 класс, сложная). Сколько решений имеет ребус $ABBB\times C+AC=CBAC$? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 8 решений.

Решение. Заметим, что цифры A и C – ненулевые. Вычтем из обоих частей равенства $\overline{AC}$. Получим $\overline{ABBB}\times C=\overline{CB00}$. Поскольку первая цифра числа $\overline{CB00}$ равна C, это возможно только в случае, когда $A=1$. Получим $\overline{1BBB}\times C=\overline{C000}+\overline{BBB}\times C=\overline{CB00}=\overline{C000}+\overline{B00}$, откуда $\overline{BBB}\times C=\overline{B00}$. Это возможно только при $B=0$. Итак, $A=1$ и $B=0$. Подставим эти значения в условие: $1000\times C+\overline{1C}=\overline{C01C}$. Это равенство выполняется при любых C. Однако разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому $C\neq 0$ и $C\neq 1$. Осталось 8 возможностей для C. Значит, ребус имеет 8 решений.

(8 класс, средняя). Число, состоящее из *N* цифр 8 (других цифр в числе нет), умножили на число 8. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную 1200. Найдите *N*.

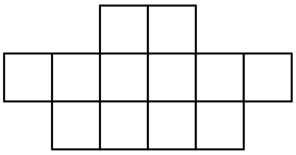
Ответ. 1191.

Решение. Перемножив числа в столбик, получим результат: 7111…11104. В этом числе *N*–2 единицы. А сумма его цифр равна $7+(N-2)+4=1200$, откуда *N*=1191.

(8 класс, средняя). Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 60 больше суммы его цифр.

Ответ. Например: 99111.

Разрезания

(4-5 класс, средняя). Разрежьте фигурку  на четыре равных клетчатых фигурки.

Решение. Возможный пример разрезания приведен на рис. 1.

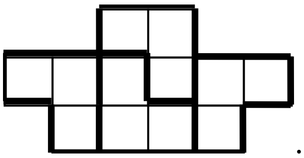


Рис. 1

(4-6 класс, средняя). Из клетчатого квадрата 5×5 вырезали центральный квадратик 1×1. Разрежьте оставшуюся фигуру на 6 равных клетчатых фигур. Приведите какой-нибудь один пример разрезания.

Решение. Два возможных примера приведены на рис. 2. Существуют и другие примеры.

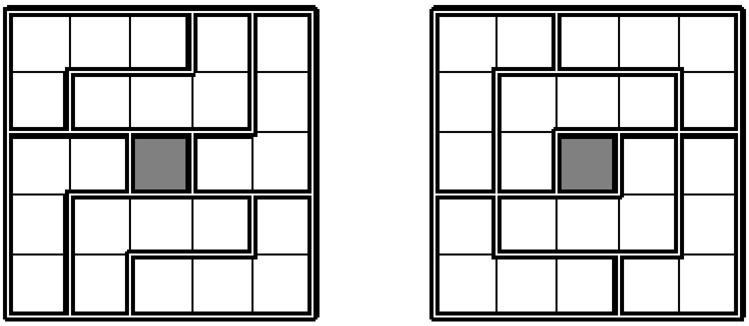


Рис. 2

(7-8 класс, средняя). Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рис. 3.

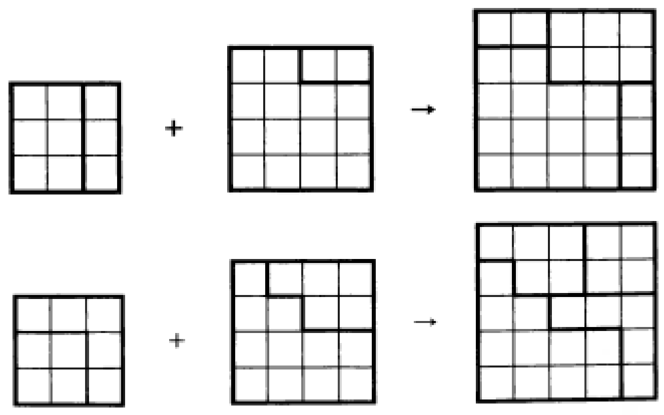


Рис. 3

Текстовые задачи

(5-7 класс, легкая). Петя, Вася и Толя – три брата. Известно, что Вася в 2 раза старше Пети, Толя в 5 раз старше Пети, и Вася на 6 лет младше Толи. Сколько лет каждому из братьев?

Ответ. Пете 2 года, Васе 4 года, Толе 10 лет.

Решение. Разница в возрасте Толи и Васи составляет 3 возраста Пети. Значит, Пете 2 года. Тогда Васе 4 года, а Толе – 10 лет.

(5-7 класс, средняя). У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из $5 + 8 + 10 = 23$ банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

(5-6 класс, средняя). Поросята Ниф-Ниф и Нуф-Нуф бежали от Волка к домику Наф-Нафа. Если бы поросята не убегали, а стояли на месте, Волк добежал бы до них за 4 минуты. Поросятам бежать до домика Наф-Нафа 6 минут. Волк бежит в 2 раза быстрее поросят. Успеют ли поросята добежать до домика Наф-Нафа?

Ответ. Успеют.

Решение. От места расположения поросят до их дома волку бежать 6:2=3 минуты, т.е. всего ему бежать 4+3=7 минут.

(6-7 класс, средняя). Вася и Маша учатся в одном классе. Мальчиков в этом классе в два раза больше, чем девочек. У Васи одноклассников на 8 больше, чем одноклассниц. Сколько одноклассниц у Маши?

Ответ. 8.

Решение. Так как у Васи одноклассников на 8 больше, чем одноклассниц, то мальчиков в этом классе на 9 больше, чем девочек. При этом их в два раза больше, чем девочек. Значит в этом классе 18 мальчиков и 9 девочек. Поэтому у Маши 8 одноклассниц.

(7-8 класс, средняя). Три ученика *A, B* и *C* участвовали в беге на 100 м. Когда *A* прибежал на финиш, *B* был позади него на 10 м, также, когда *B* финишировал, *C* был позади него на 10 м. На сколько метров на финише *A* опередил *C*?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость *B* составляет 0,9 от скорости *A*, а скорость *C* составляет 0,9 от скорости *B*, т.е. 0,81 от скорости *A*.

(8-9 класс, средняя). Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 17.00 проехал в 1,25 раза больший путь, чем к 16.00. Когда поезд выехал?

Ответ. В 12.00.

Решение. За 1 час от 16.00 до 17.00 поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до 16.00. Значит, он ехал 4 часа и выехал в 12.00.

(8-9 класс, средняя). По дороге едут велосипедисты: на запад – Вася и Петя с равными между собой скоростями, а на восток – Коля и Миша с равными между собой скоростями. Вася встретился с Мишей в 12.00, Петя с Мишей – в 15.00, Вася с Колей – в 14.00. Когда встретились Петя с Колей?

Ответ. В 17.00.

Решение. Расстояние между Мишей и Колей и их скорости не меняются, а скорости Васи и Пети равны. Вася встретил Колю через 2 ч после Миши, значит, Петя встретят Колю тоже через 2 ч после Миши, т.е. в 17.00.

(6-7 класс, сложная). У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

(9-11 класс, средняя). По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположенных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x+y)=170$ и $170(x-y)=170$. Отсюда находим x = 9 м/с и y = 8 м/с.

Логические задачи

(6-7 класс, сложная). На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: "Мы все лжецы". Вася на это ему ответил: "Нет, только ты". Может ли Толя быть лжецом?

Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

(6-7 класс, сложная). Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие – всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

Ответ. Не могли.

Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой – лжет. Пусть следующий по кругу за П – шестиклассник К. Тогда в паре П – К также один говорит правду, а другой – лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь – чередуются. Поэтому их должно быть четное количество.

(9-11 класс, средняя). В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдется хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдется хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, а красных – 17.

Четность

(7-8 класс, сложная). Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на десяти кустах равно сумме пяти нечетных чисел, т. е. числу нечетному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.

(6-7 класс, сложная). В 6Б классе обучаются 20 учеников. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

Ответ: Не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое свое дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе – с двумя другими и т. д. Так как у него 19 одноклассников (нечетное число), то после девятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не отдежурил. Полученное противоречие завершает доказательство.

(6-7 класс, сложная). Два натуральных числа в сумме дают 2017. Вася увеличил каждое из них на 50 и перемножил полученные числа. Он получил, что произведение также оканчивается на 2017. Докажите, что Вася ошибся.

Решение. Если сумма двух натуральных числе равна 2017, то одно из них четное, а другое нечетное. Если к четному числу прибавить 50, получится четное число. Аналогично, если к нечетному числу прибавить 50, получится нечетное число. А произведение четного и нечетного чисел должно быть числом четным и поэтому не может оканчиваться на 2017.

(6-7 класс, средняя). Сумма пяти чисел равна 200. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

Решение. Произведение чисел нечетно, следовательно, все пять чисел нечетны, и их сумма также должна быть нечетной.

(5-7 класс, сложная). В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Коля.

Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 29, 30, 33 первое и третье – нечётные, а второе – чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет.

(6-7 класс, сложная). У деда с Бабкой были чашечные весы и гири массами 1, 3 и 5 кг (гирь каждого веса было больше одной). Сначала Бабка уравновесила репку на весах. Потом Дед уравновесил репку на весах. Мог ли Дед использовать для этого на 3 гири больше чем Бабка?

Ответ. Не мог.

Решение. Заметим, что сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна, а четного числа нечетных слагаемых четна. Числа 1, 3 и 5 – нечетные. Поэтому если репка весит четное число килограммов, то для ее взвешивания потребуется четное число гирь, а если репка весит нечетное число килограммов, то для ее взвешивания потребуется не четное число гирь. То есть в любом случае количество гирь, которое потребуется Бабке и Деду для взвешивания репки, будет отличаться на четное число. Однако, число 3 – нечетное.

Делимость

(6-7 класс, легкая). Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

(7-8 класс, сложная). В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Ответ. 24 ученика.

Решение. Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе $3x$ ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит $3y$ ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, это 24.

(8-9 класс, сложная). Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2222. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.

Решение. Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 22, на 4 не делится).

(9-10 класс, средняя). На доске написано число 543254325432. Некоторые цифры стерли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

(8-9 класс, сложная). У Пети в 4 карманах лежит несколько монет достоинствами в 2, 5 и 10 рублей. В трёх карманах денег поровну, а в четвёртом – вдвое больше, чем в третьем. Могут ли ровно 7 из Петиных монет быть двухрублёвыми?

Ответ. Не могут.

Решение. Общая сумма денег у Пети впятеро больше, чем сумма, лежащая в первом кармане, то есть кратна 5. Если бы у него было ровно 7 двухрублёвых монет, общая сумма денег не делилась бы на 5, так как достоинства остальных его монет делятся на 5.

(8-10 класс, сложная). Продавец на рынке хочет разложить кучку из 41 ореха на 41 кучки по одному ореху. Ему разрешается разделить любую кучку на две, но, если при этом получились две неодинаковые кучки, он должен заплатить хозяину рынка 1 рубль. Как ему выполнить свою задачу, заплатив всего 2 рубля?

Решение. Например, продавец может сделать так. Сначала он разделит кучку из 41 ореха на две кучки: из 1 ореха и из 40 орехов. Затем кучку из 40 орехов он разделит на две кучки: из 32 орехов и из 8 орехов. За эти операции продавец заплатит 2 рубля. Дальше он бесплатно может делить оставшиеся кучки пополам, пока не получатся кучки из 1 ореха.

Алгебра

(8-9 класс, средняя). Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 1000. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 1002.

Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 1000, то есть $y - x - 1 = 1000$ или $y - x = 1001$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1) = xy - y + x - 1$. Заметим, что $xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 1001 - 1 = xy - 1002$. То есть произведение уменьшилось на 1002.

(8 класс, средняя). Докажите, что если $a + 2b = 3c$ и $b + 2c = 3a$, то $c + 2a = 3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

(9 класс, средняя). Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2+b=b^2+a$.

Ответ. $a+b=1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a\neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

(9-10 класс, средняя). Найдите все пары чисел x, y, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1$.

Ответ. $x = y = -0{,}5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x \geq y$, $x \leq y$, откуда и следует $x = y = -0{,}5$.

(9-10 класс, средняя). Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что

$$\left(x+\frac{1}{yzt}\right)\left(y+\frac{1}{ztx}\right)\left(z+\frac{1}{txy}\right)\left(t+\frac{1}{xyz}\right)>0.$$

Докажите, что $xyzt>0$.

Первое решение. Вынесем из каждой скобки множитель, равный первому слагаемому в этой скобке. Тогда данное произведение примет вид

$$xyzt\left(1+\frac{1}{xyzt}\right)^4.$$

Чётная степень ненулевого числа положительна, поэтому $\left(1+\frac{1}{xyzt}\right)^4>0$. Разделив исходное неравенство на это число, получаем, что $xyzt>0$.

Второе решение. Приведём сумму в каждой скобке к общему знаменателю:

$$\frac{xyzt+1}{yzt}\cdot\frac{xyzt+1}{ztx}\cdot\frac{xyzt+1}{txy}\cdot\frac{xyzt+1}{xyz}=\frac{(xyzt+1)^4}{(xyzt)^3}.$$

Из положительности этой дроби следует положительность знаменателя, то есть положительность искомого произведения.

(8-9 класс, сложная). В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 11 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций $y=11x+20$, $y=12x+19$, $y=13x+18$, $y=14x+17$, $y=15x+16$, проходят через точку (1; 31).

Геометрия

(8 класс, легкая). Сторона AC треугольника ABC точками D и E разделена на три равные части (точка D лежит между A и E). Докажите, что если $BD=BE$, то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. Так как треугольник BDE равнобедренный, то $\angle BDE=\angle BED$. Значит, равны соответствующие смежные углы: $\angle ADB=\angle CEB$. По условию, $AD=EC$ и $BD=BE$. Поэтому треугольники ADB и CEB равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и BC. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный.

(8-9 класс, средняя). В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC=120°$, $\angle DAB=60°$.

Ответ. $\angle A=90°$, $\angle B=60°$, $\angle C=30°$.

Решение. Так как $\angle ADC=120°$, то $\angle ADB=60°$. Значит, треугольник ADB равносторонний (и $\angle ABD=60°$). Тогда $BD = AD = DC$ и треугольник ADC равнобедренный. Значит $\angle DAC= \angle DCA=(180°–120°):2=30°$. Откуда $\angle BAC = 90°$.

(9 класс, средняя). В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите угол ABC, если $AC = 2AB$.

Ответ. $\angle ABC = 90°$.

Решение. Пусть точка D – середина стороны AC (см. рис. 4). Тогда $AD = AC/2 = AB$. Значит, треугольники ABE и ADE равны (сторона AE – общая, $\angle BAE = \angle CAE$). Тогда $\angle ABC$

$= \angle ADE = 90°$, так как ED – медиана равнобедренного треугольника AEC ($AE=EC$ – по условию) и, значит, его высота.

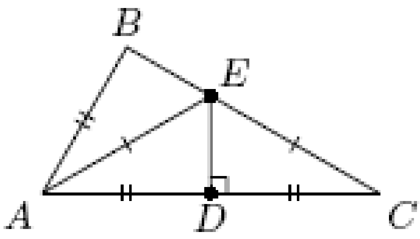


Рис. 4

(10 класс, легкая). В треугольнике ABC с углами $ACB = 90°$, $BAC = 30°$ проведена высота CD. Найдите сумму длин катетов треугольника ABC, если $BD + CD = 2017$.

Ответ. 4034.

Решение. В треугольнике BDC угол D прямой, а угол CBD равен 60°. Поэтому треугольники ABC и CBD подобны. Коэффициент подобия равен отношению $AB : CB = 2$. Так как сумма длин катетов треугольника CBD равна 2017, то искомая сумма равна 4034.

(10-11 класс, сложная). Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF – биссектрисы треугольников ADB и CDB. Докажите, что $EF \parallel AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что $EF \parallel AC$.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013 г., с изменениями № 249 от 17 марта 2015 г., № 1488 от 17 декабря 2015 г.), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания муниципального этапа, описание подходов к разработке заданий региональными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения муниципального этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017/2018 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 05 июня 2017 года).

Основные задачи

На муниципальном этапе происходят изменения в целях Олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ ее результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одаренными школьниками в регионе. При этом усиливается стимулирующая роль Олимпиады, когда у ее участника появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений не только с учащимися своей школы. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьезным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших школьников различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания еще в большей, по сравнению со школьным этапом, степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой; повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одаренными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одаренных учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7-11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллелей 5 и 6 классов, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, на муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады: для учащихся 5 и 6 классов – 3 часа; для учащихся 7-11 классов – 4 часа.

Во время Олимпиады участники:

должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

должны следовать указаниям организаторов;

не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Требуется выполнение олимпиадных работ в тетрадях в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков.

б) Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например, 9-01, 9-02, …) на обложке тетради и на первой беловой странице с последующим снятием обложки и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется **после** составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

в) В состав жюри олимпиады наряду с лучшими учителями необходимо включение преподавателей университетов, а также студентов и аспирантов, успешно выступавших на олимпиадах высокого уровня. Работа преподавателя в системе дополнительного образования, в том числе с участниками муниципального этапа, не может быть основанием для отказа от его включения в состав методических комиссий и жюри.

г) После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Жюри олимпиады не вправе отказывать участнику олимпиады в исправлении оценки его работы в ситуации, когда реально требуется ее повышение. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

д) По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призеров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для муниципального этапа

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству Участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.
6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5-6 классов рекомендуется включать

задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Желательно составление заданий олимпиады из **новых** задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний Участника, а его математические способности.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри. Такая организация проверки рекомендуется для регионов с невысокой плотностью населения. При необходимости на проверку можно отправлять не сами работы, а их сканы.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.

6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать. Допускается выписывание условий заданий на доску.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий муниципального этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания муниципального этапа олимпиады

Приведенные типовые задания муниципального этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех регионов, в силу заметной разницы в уровне развития в различных регионах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия в городах сильных математических школ и т.п.. Региональным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать уровень математического образования в территории. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий муниципального этапа олимпиады, примерный (усредненный) уровень их сложности, тематику.

Запрещается использовать для проведения олимпиады приведенный ниже комплект заданий, так как данные методические рекомендации являются открытыми, и участники олимпиады могли ознакомиться с ними.

Условия задач

5 класс

5.1. Если в комнату войдет мама, то суммарный возраст находящихся в комнате увеличится в 4 раза, а если вместо нее войдет папа – суммарный возраст увеличится в 5 раз. Во сколько раз увеличится суммарный возраст, если в комнату войдут папа с мамой?

5.2. За столом сидят 10 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). У них спросили, кого среди них больше. Пятеро сказали: «Рыцарей», трое сказали: «Лжецов», а двое сказали: «Поровну». Сколько рыцарей могло быть среди сидящих за столом?

5.3. Можно ли в квадрате 5×5 покрасить 8 клеток так, чтобы у каждой покрашенной клетки было ровно 3 непокрашенных соседних клетки? Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.

5.4. Петя задумал четырехзначное число, а затем для каждых двух цифр задуманного числа записал их сумму. В итоге он получил 6 чисел. Могла ли сумма этих шести чисел равняться 71?

5.5. В первенстве России по футболу участвуют 18 команд. За победу в матче дается 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. В первом круге каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Оказалось, что все они при этом набрали разное число очков. Могла ли команда, занявшая в первом круге второе место, набрать 49 очков?

6 класс

6.1. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 11 баранок также стоят дороже 100 рублей. Правда ли, что 1 калач и 3 баранки стоят дороже 50 рублей?

6.2. У Олега есть семь прямоугольников размерами 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6 и 1×7. Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинаковой площади, но разного периметра.

6.3. Вася, Петя, Миша и Толя вскладчину купили радиоуправляемый самолет, причем каждый из них заплатил целое число рублей. У ребят спросили, сколько они потратили денег.

Вася сказал: «Я заплатил ровно четверть цены самолета».

Петя сказал: «Я заплатил на 35 рублей больше Миши».

Толя сказал: «Я заплатил на 50 рублей меньше Васи».

Докажите, что кто-то из ребят ошибся в подсчетах.

6.4. Существует ли набор из 4 гирь такой, что с их помощью можно взвесить на чашечных весах любое целое количество килограммов от 10 до 24? Гири можно ставить на обе чашки весов.

6.5. За круглым столом сидят 10 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду), причем известно, что среди них есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей лжец, а другой – рыцарь»?

7 класс

7.1. На доске написаны две дроби, сумма которых равна 1. Из числителя и знаменателя первой дроби вычли одно и то же число и полученную дробь записали вместо первой. Оказалось, что сумма написанных дробей стала равняться $\frac{5}{6}$. Покажите, как такое могло получиться.

7.2. У Олега есть семь прямоугольников размером 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6 и 1×7. Помогите ему сложить из них два прямоугольника одинакового периметра, но разной площади.

7.3. Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?

7.4. Четырехзначное число N, не все цифры которого одинаковы, умножили на каждую из его цифр. Могло ли в результате получиться натуральное число, которое делится на 1111?

7.5. В пустую комнату по очереди зашли 10 человек – лжецов и рыцарей. Каждый из них, заходя в комнату, подсчитывал количество лжецов и рыцарей в комнате, включая себя, записывал на листке некоторое утверждение и клал листок на стол. Известно, что все утверждения рыцарей были правильными, лжецов – неправильными, а в результате на столе оказалось 10 листков бумаги, на которых было написано:

«Сейчас в комнате 1 лжец.»

«Сейчас в комнате 2 лжеца.»

«Сейчас в комнате 3 лжеца.»

⋮

«Сейчас в комнате 10 лжецов.»

Какое максимальное число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

8 класс

8.1. Найдите какое-нибудь натуральное число N такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от N, то получится 2016.

8.2. Самый быстрый бегун в классе бегает на 0,1 м/с быстрее второго, на 0,2 м/с быстрее третьего и на 0,3 м/с быстрее четвертого. Для эстафеты 2×400 м составили две команды. В первую взяли самого быстрого и самого медленного из этих четырех, во вторую – оставшихся двух школьников. Какая команда быстрее пробежит эстафету? (Каждый бегун бежит дистанцию с постоянной скоростью.)

8.3. Сумма двух дробей равна 1. Из числителей и знаменателей этих дробей вычли одно и то же число. Может ли сумма полученных дробей равняться $\frac{1}{2016}$?

8.4. Пусть $ABCD$ и $DEFG$ – параллелограммы такие, что точка D лежит на отрезке AG, точка E – на отрезке DC, и при этом $AB=DG=2AD=2DE$. Пусть M – середина отрезка DG. Докажите, что CG – биссектриса угла MCF.

8.5. Имеется таблица 100×100, все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть A – количество строк, в каждой из которых сумма чисел делится на 10000, а B – количество столбцов, в каждом из которых сумма чисел делится на 10000. Первый игрок выигрывает, если $A>B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

9 класс

9.1. Докажите, что при любых a и b хотя бы одно из уравнений $x^2-2ax+ab=0$ и $x^2-2bx+ab=0$ имеет решение.

9.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?

9.3. Четырех школьников, которые бегают с разной скоростью, разбили на две команды по два человека, и в первую включили самого быстрого из них. Вначале команды соревновались в том, бегуны какой команды раньше встретятся, если на дистанции в 400 м они побегут навстречу друг другу. Оказалось, что командам потребовалось одинаковое время. А какая команда быстрее пробежит эстафету 2×400 м? (В эстафете каждый спортсмен пробегает 400 метров. Считается, что скорость бегунов во время забегов постоянна.)

9.4. В остром угле с вершиной S проведены трисектрисы: два луча, выходящих из точки S и делящих данный угол на три равные части. Из точки A, лежащей на одной стороне угла, опущены перпендикуляры AB и AC на эти трисектрисы. Докажите, что прямая BC перпендикулярна второй стороне угла.

9.5. Имеется таблица 101×101, все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 101^2, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. Пусть A – количество строк, в которых сумма чисел делится на 101^2, а B – количество столбцов, в которых сумма чисел делится на 101^2. Первый игрок выигрывает, если $A\geq B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

10 класс

10.1. Ненулевые числа a, b и c таковы, что числа $a(b-c)$, $b(c-a)$, $c(a-b)$, записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа $a(b^3-c^3)$, $b(c^3-a^3)$, $c(a^3-b^3)$ также образуют арифметическую прогрессию.

10.2. Вася задумал 4 различных натуральных числа. После этого он выписал на доску 6 чисел – все попарные суммы задуманных чисел. Какое наибольшее количество выписанных чисел могли оказаться простыми?

10.3. Рассматриваются прямоугольные треугольники, у которых вершина прямого угла находится в начале координат, а две другие вершины – на ветвях параболы $y=x^2$. Докажите, что для каждого такого треугольника произведение расстояний от вершин острых углов до оси Oy равно 1.

10.4. В треугольник ABC вписана окружность ω. На стороне AB выбраны точки A_1, C_2 и B_3, на стороне BC – точки B_1, A_2 и C_3, на стороне CA – точки C_1, B_2 и A_3 так, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 касаются окружности ω, а четырехугольники $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$ и $CC_1C_2C_3$ – параллелограммы. Докажите, что сумма площадей треугольников ABA_3, BCB_3 и CAC_3 равна площади треугольника ABC.

10.5. Имеется таблица 100×100, все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 10000, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть A – наибольшая из сумм чисел в строках, а B – наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

11 класс

11.1. Докажите, что при любых α и β хотя бы одно из уравнений $x^2-2x\sin\alpha+\sin^2\beta=0$ и $x^2-2x\cos\alpha+\cos^2\beta=0$ имеет решение.

11.2. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 по кругу так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих чисел была простым числом?

11.3. Обозначим через O вершину параболы $y=ax^2$. Назовем прямую, пересекающую параболу в двух точках A и B, *особой*, если угол AOB – прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.

11.4. Дана треугольная пирамида $SABC$. На ребрах SA, SB и SC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что отрезки BA_1 и CA_1 – биссектрисы треугольников BSA и CSA соответственно; отрезки AB_1 и CB_1 – биссектрисы треугольников ASB и CSB соответственно; а отрезки AC_1 и BC_1 – биссектрисы треугольников ASC и BSC соответственно. Пусть SH – высота пирамиды. Докажите, что если $BC>CA>AB$, то $BC\cdot HA<CA\cdot HB<AB\cdot HC$.

11.5. Имеется таблица 111×111, все клетки которой изначально пусты. Двое играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За один ход можно записать в любую незанятую клетку таблицы любое натуральное число от 1 до 111^2, если такого числа еще нет в таблице. Игроки записывают числа, пока не заполнят всю таблицу. После этого подсчитываются суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов. Пусть A – наибольшая из сумм чисел в строках, а B – наибольшая из сумм чисел в столбцах. Первый игрок выигрывает, если $A \geq B$, иначе выигрывает второй. Кто из игроков сможет выиграть независимо от игры соперника?

Решения задач

5 класс

5.1. Ответ. В 8 раз.

Если суммарный возраст находящихся в комнате – 1 часть, то возраст мамы – 3 части, а папы – 4 части. Значит, возраст всех вместе будет 8 частей.

5.2. Ответ. 3.

Если бы за столом сидели только лжецы, то никто из них не мог бы сказать, что лжецов за столом больше. Значит, за столом есть хотя бы один рыцарь. Заметим, что все рыцари должны были ответить одинаково, а лжецы так же отвечать не могли.

Те пятеро, кто сказали, что за столом больше рыцарей, не могут быть рыцарями, так как в этом случае рыцарей было бы поровну, и они бы солгали. Также те двое, кто сказали, что рыцарей и лжецов за столом поровну, не могут быть рыцарями, так как в этом случае рыцарей было бы двое, а не половина. Значит, рыцари – это трое сказавших, что за столом больше лжецов. Итак, за столом сидят 3 рыцаря (и 7 лжецов), и они могут сказать набор фраз, приведенный в условии.

5.3. Ответ. Можно.

Два возможных примера покраски показаны на рис. 1.

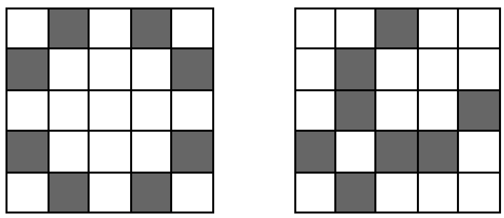


Рис. 1

Замечание. Существуют и другие способы покраски.

5.4. Ответ. Не могла.

Пусть a, b, c и d – цифры данного числа. Тогда полученные числа есть $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ и $c+d$. Их сумма равна $3(a+b+c+d)$. Это число должно делиться на 3, а 71 на 3 не делится.

5.5. Ответ. Не могла.

Максимальное количество очков, которое могла набрать одна команда, равно 51 (по 3 очка в 17 играх). Если бы команда, занявшая второе место, набрала 49 очков, это означало бы, что команда, занявшая первое место, набрала бы не меньше 50 очков. Но набрать ровно 50 очков в 17 играх невозможно (одна ничья уменьшает набранную сумму очков сразу на 2.). Значит, команда, занявшая первое место, должна была набрать 51 очко. Но это означает, что она выиграла у второй команды, и та не могла набрать больше, чем 48 очков.

6 класс

6.1. Ответ. Правда.

Если купить 3 калача и 1 баранку, а потом еще 1 калач и 11 баранок, то всего получится 4 калача и 12 баранок. За них суммарно будет уплачено больше $100+100=200$ рублей. Но четверть от 4 калачей и 12 баранок – как раз 1 калач и 3 баранки. Значит, они будут стоить больше $200:4=50$ рублей.

6.2. Один из примеров приведен на рис. 2. Полученные прямоугольники имеют площадь 14 и периметры 18 и 30.

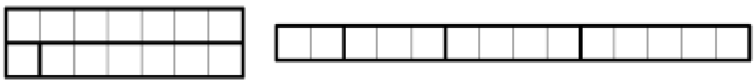


Рис. 2

Замечание. Существуют и другие примеры.

6.3. Предположим, что никто из ребят не ошибся.

Так как Вася заплатил четверть цены самолета, то цена самолета делится на 4. Значит, цена является четным числом.

Так как Петя заплатил на 35 рублей больше Миши, то Петя с Мишей вместе заплатили нечетное число рублей.

Так как Толя заплатил на 50 рублей меньше Васи, то Толя с Васей вместе заплатили четное число рублей.

Но тогда все ребята вместе заплатили нечетное число рублей, а цена самолета четная. Получили противоречие.

6.4. Ответ. Существует.

Рассмотрим набор из гирь массами 1 кг, 2 кг, 4 кг и 17 кг. В таблице ниже показано, как взвесить любой груз от 10 кг до 24 кг. Груз кладется на левую чашку весов.

Груз	Гири на левой чашке	Гири на правой чашке
10	$1+2+4$	17
11	$2+4$	17
12	$4+1$	17
13	4	17
14	$1+2$	17
15	2	17
16	1	17
17	нет	17
18	нет	$17+1$
19	нет	$17+2$
20	нет	$17+1+2$
21	нет	$17+4$
22	нет	$17+4+1$
23	нет	$17+4+2$
24	нет	$17+4+2+1$

Замечание. Существуют и другие примеры.

6.5. Ответ. 9.

Предположим, что все сидящие за столом смогли сказать такую фразу. Тогда рядом с лжецом должны сидеть либо два лжеца, либо два рыцаря. Но если рядом с каким-то лжецом будут сидеть два лжеца, то с его соседом-лжецом также рядом должны сидеть два лжеца.

Продолжая рассуждать аналогично, получим, что все сидящие за столом лжецы; по условию это невозможно. Значит, рядом с каждым лжецом должны сидеть два рыцаря. А рядом с каждым рыцарем должен сидеть один лжец и один рыцарь.

Таким образом, рассадка за столом восстанавливается однозначно: $\cdots - Л - Р - Р - Л - Р - Р - \cdots$. Но тогда число сидящих за столом должно делиться на 3, а 10 на 3 не делится. Поэтому все 10 человек не могли сказать требуемую фразу.

Покажем, что 9 из 10 сидящих за столом могли сказать требуемую фразу. Это могло произойти, если люди за столом сидят следующим образом: $-Л-Р-Р-Л-Р-\underline{Р}-Р-Л-Р-Р-$. Среди них только подчеркнутый рыцарь не мог сказать требуемую фразу.

7 класс

7.1. Первое решение. Из условия следует, что первая дробь уменьшилась на $\frac{1}{6}$. Но это как раз разность дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Значит, в качестве первой дроби можно взять $\frac{2}{3}$, а второй $\frac{1}{3}$. Затем из числителя и знаменателя первой дроби нужно вычесть по 1.

Второе решение. Подойдет и такой пример. В качестве первой дроби возьмем $\frac{1}{6}$, а второй $\frac{5}{6}$. Затем из числителя и знаменателя первой дроби нужно вычесть по 1, и первая дробь станет равной нулю.

Замечание. Существуют и другие примеры.

7.2. Один из примеров приведен на рис. 3. Полученные прямоугольники имеют периметр 22 и площади 18 и 10.

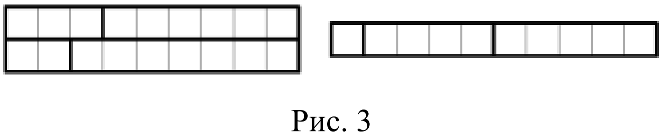


Рис. 3

Замечание. Существуют и другие примеры.

7.3. Ответ. Верно.

Если купить 3 калача и 1 баранку, а потом еще 1 калач и 13 баранок, то всего получится 4 калача и 14 баранок. За них суммарно будет заплачено больше $100+100=200$ рублей. Но четверть от 4 калачей и 14 баранок – это 1 калач и 3,5 баранки; они будут стоить больше $200:4=50$ рублей. Поэтому 1 калач и 4 баранки тем более стоят дороже 50 рублей.

7.4. Ответ. Не могло.

Разложим число 1111 на простые множители: $1111=11\cdot 101$. Поскольку цифры не могут делиться ни на 11, ни на 101, на них будет делиться само исходное четырехзначное число. Значит, оно будет делиться и на их произведение, то есть на число 1111. Значит, оно имеет вид $\overline{AAAA}$. А по условию у числа не все цифры должны быть одинаковыми.

7.5. Ответ. 5.

Заметим, что в комнату не могли зайти 2 рыцаря подряд. Действительно, если бы такое произошло, они должны были написать на своих листках одинаковые утверждения. А все утверждения различны. Из этого следует, что в комнату могло войти не более 5 рыцарей, иначе какие-нибудь двое вошли бы подряд.

Покажем, что в комнату могло войти ровно 5 рыцарей. Пусть сначала в комнату войдет лжец, потом войдет рыцарь, потом – лжец и так далее. При этом рыцари напишут на своих листках, что в момент их прихода находятся 1, 2, 3, 4 и 5 лжецов соответственно. А лжецы могут на своих листках написать про 6, 7, 8, 9 и 10 лжецов, что будет неправдой, так как в комнате всегда не более 5 лжецов.

8 класс

8.1. Ответ. 1344.

Если N – четное число, то его наибольший делитель (отличный от N) есть $\frac{N}{2}$, а их сумма – $\frac{3N}{2}$, откуда $\frac{3N}{2}$ = 2016 и $N=1344$.

Замечание. Приведённый пример – единственный.

8.2. Ответ. Вторая.

Если v м/с – скорость самого медленного бегуна, то скорости остальных будут равны $v+0{,}1$ м/с, $v+0{,}2$ м/с, $v+0{,}3$ м/с. Первая команда пробежит эстафету за $\frac{400}{v}+\frac{400}{v+0{,}3}=\frac{400(2v+0{,}3)}{v(v+0{,}3)}$ секунд, а вторая – за $\frac{400}{v+0{,}1}+\frac{400}{v+0{,}2}=\frac{400(2v+0{,}3)}{(v+0{,}1)(v+0{,}2)}$ секунд. Числители дробей равны, поэтому меньше та из них, у которой знаменатель больше. Но $(v+0{,}1)(v+0{,}2)=v^2+0{,}3v+0{,}02$ больше, чем $v(v+0{,}3)=v^2+0{,}3v$.

8.3. Ответ. Может.

Первое решение. Например, можно взять две одинаковых дроби $\frac{4031}{8062}$ и $\frac{4031}{8062}$ с суммой 1. Уменьшив их числители и знаменатели на 4030, получим дроби $\frac{1}{4032}$ и $\frac{1}{4032}$ с суммой $\frac{1}{2016}$.

Второе решение. Также в качестве примера можно взять дроби $\frac{2015}{4031}$ и $\frac{2016}{4031}$ с суммой 1. Уменьшив их числители и знаменатели на 2015, получим дроби $\frac{0}{2016}$ и $\frac{1}{2016}$ с суммой $\frac{1}{2016}$.

Замечание. Существуют и другие способы – в частности, с использованием отрицательных чисел.

8.4. Первое решение. Из условия следует, что $CE = DM = CD/2$ и $EF = DG$ (рис. 4). Кроме того, $\angle CEF = \angle CDM$ как соответственные при параллельных прямых EF и DG. Значит, треугольники CEF и MDC равны по первому признаку, откуда $CM = CF$. Тогда по третьему признаку равны треугольники FCG и MCG, откуда и следует утверждение задачи.

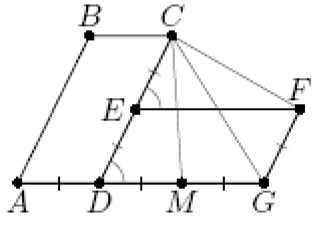


Рис. 4

Второе решение. Продлим отрезки GF и BC до пересечения в точке K (рис. 5). Тогда в параллелограмме $CDGK$ имеем $CD = GD$, то есть он – ромб. При этом, так как $GF = CD/2$, точки M и F – середины сторон этого ромба. Значит, углы MCG и FCG симметричны относительно диагонали CG и потому равны.

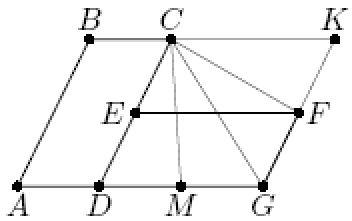


Рис. 5

8.5. Ответ. Второй.

Положим $n = 100$. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до $n^2 - 1$, кроме $\frac{n^2}{2}$, взяв в пару к числу k число $n^2 - k$. Оставшиеся числа $\frac{n^2}{2}$ и n^2 он также объединит в пару. Назовем эту пару *большой*. Заметим, что суммы чисел во всех парах, кроме большой, равны n^2, а сумма чисел большой пары равна $\frac{3n^2}{2}$. Из этого, в частности, следует, что сумма всех чисел в таблице не делится на n^2.

Теперь, если первый игрок ставит какое-то число в любую клетку таблицы, то второй игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно средней горизонтали (горизонтальной оси симметрии таблицы). Несложно заметить, что второй игрок всегда сможет сделать такой ответный ход. Действуя таким образом, он добьется того, что в каждом из столбцов, где не стоит большая пара, сумма чисел будет делиться на n^2. То есть он добьется того, что $B = n - 1$. Осталось заметить, что $A \neq n$, так как в этом случае сумма чисел в каждой строке делилась бы на n^2, а, значит, и сумма всех чисел во всей таблице делилась бы на n^2, что невозможно. Поэтому $A \leq n - 1 = B$, и второй игрок выиграет.

9 класс

9.1. Пусть оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны. Записав их, получим: $4(a^2 - ab) < 0$ и $4(b^2 - ab) < 0$. Сложив эти неравенства, получаем, что $4(a - b)^2 < 0$ – противоречие.

9.2. Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что числа получилось расставить требуемым образом. Заметим, что сумма любых трех чисел от 1 до 100 больше 2, поэтому если какая-то сумма трех чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Пусть по кругу подряд стоят числа a, b, c, d. Тогда числа $a+b+c$ и $b+c+d$ – простые нечетные. Но тогда их разность, равная $a-d$, будет четной как разность двух нечетных чисел. Отсюда следует, что числа a и d имеют одинаковую четность. Таким образом, любые два числа, стоящие через два, имеют одинаковую четность.

Занумеруем числа по кругу. Тогда числа с номерами 1, 4, 7, …, 100 будут иметь одинаковую четность. Но число с номером 3 должно иметь такую же четность, что и число с номером 100. Аналогично, такую же четность будут иметь числа с номерами 6, 9, 12, …, 99, 2, 5, …, 98. Таким образом, все числа получились одной четности. Противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, предположим, что числа получилось расставить требуемым образом, и заметим, что сумма любых трех чисел, стоящих подряд, нечетна. Возьмем в круге любое число N, а остальные 99 чисел разобьем на 33 группы по 3 подряд идущих числа. Тогда сумма этих 99 чисел равна нечетному числу как сумма 33 нечетных чисел. С другой стороны, сумма всех чисел от 1 до 100 четна, так что и число N также нечетно. Однако в качестве N мы могли выбрать любое из чисел от 1 до 100. Противоречие.

9.3. Ответ. Вторая.

Если $a<b<c<d$ – скорости бегунов, то из первого условия следует, что $a+d=b+c$ (суммарные скорости команд одинаковы). Первая команда на то, чтобы пробежать эстафету, затратит $\frac{400}{a}+\frac{400}{d}=\frac{400(a+d)}{ad}$, а вторая – $\frac{400}{b}+\frac{400}{c}=\frac{400(b+c)}{bc}$ секунд. Числители дробей равны, поэтому меньше та из них, у которой знаменатель больше.

Итак, нам нужно сравнить числа ad и bc, когда $a+d=b+c$. Приведем один из способов сравнения. Если x – среднее арифметическое чисел a и d, то $a=x-\alpha$, $d=x+\alpha$, $b=x-\beta$, $c=x+\beta$, где $\beta<\alpha$. Поэтому $ad=x^2-\alpha^2$, $bc=x^2-\beta^2$, то есть $ad<bc$. Значит, вторая команда пробежит эстафету быстрее.

9.4. Пусть P – точка пересечения прямой BC со второй стороной угла (рис. 6). Тогда требуется доказать, что $\angle SPB$ – прямой. Это равносильно тому, что $\angle PBS+\angle BSP=90^\circ$. Точки A,B,C,S лежат на одной окружности с диаметром AS, поэтому $\angle CBS=\angle CAS$.

Кроме того, из условия следует, что $\angle BSP = \angle ASC$. Значит, $\angle PBS + \angle BSP = \angle CAS + \angle ASC = 90^\circ$. Утверждение доказано.

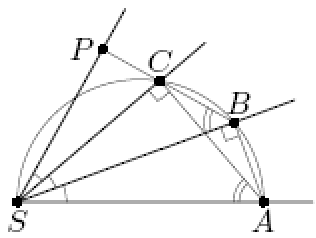


Рис. 6

9.5. Ответ. Первый.

Положим $n = 101$. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до $n^2 - 1$, взяв в пару к числу k число $n^2 - k$. Заметим, что суммы чисел во всех парах равны n^2.

Пусть первым ходом первый игрок поставит число n^2 в центральную клетку таблицы. Назовем строку и столбец, содержащие эту клетку, *центральными*.

Теперь, если второй игрок ставит какое-то число в любую клетку таблицы не в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной строки. Если же второй игрок ставит какое-то число в клетку таблицы в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной клетки таблицы. Несложно заметить, что первый игрок всегда сможет сделать такой ответный ход.

Действуя таким образом, он добьется того, что в каждом из столбцов стоят пары чисел с суммой n^2 и одно число из центральной строки. Во всех клетках центральной строки, кроме центральной, стоят натуральные числа, меньшие n^2. Поэтому сумма чисел в каждом столбце, кроме центрального, не будет делиться на n^2; сумма же чисел в центральном столбце будет делиться на n^2. Поэтому $B = 1$. Осталось заметить, что в центральной строке стоят пары чисел с суммой n^2 и число n^2. Поэтому сумма чисел в ней делится на n^2. Значит, $A \geq 1 = B$, и первый игрок выиграет.

10 класс

10.1. Числа образуют арифметическую прогрессию, поэтому $2b(c-a) = a(b-c) + c(a-b)$, откуда $3b(c-a) = 0$. Поскольку $b \neq 0$, получаем $c - a = 0$.

Подставив в выражения $a(b^3-c^3), b(c^3-a^3), c(a^3-b^3)$ число a вместо c, получаем тройку $a(b^3-a^3)$, 0, $a(a^3-b^3)$. Сумма крайних чисел равна нулю, то есть удвоенному среднему числу. Значит, они образуют арифметическую прогрессию.

10.2. Ответ. 4.

Заметим, что сумма двух различных натуральных чисел больше 2, поэтому если какая-то сумма двух чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Поэтому количество простых чисел, написанных на доске, не превосходит количества нечетных чисел, записанных на доске. Если все 4 задуманных Васей числа четны (или все 4 нечетны), то на доску будут выписаны только четные числа. Если Вася задумал 1 четное число и 3 нечетных (или 1 нечетное число и 3 четных), то на доску будут выписаны 3 четных числа и 3 нечетных. Наконец, если Вася задумал 2 четных числа и 2 нечетных, то на доску будут выписаны 2 четных числа и 4 нечетных. Таким образом, на доску будет выписано не более 4 нечетных чисел. То есть простых чисел не больше 4.

Ровно 4 простых числа могли быть выписаны, например, если Вася задумал числа 1, 2, 3, 4. Тогда простыми числами, выписанными на доску, будут $1+2=3$, $1+4=5$, $3+2=5$ и $3+4=7$.

10.3. Пусть $O(0;0)$, $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$, где $b<0<a$ – координаты вершин данного треугольника. Он – прямоугольный, поэтому скалярное произведение векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ равно нулю. Имеем $\vec{OA}=(a;a^2), \vec{OB}=(b;b^2)$, поэтому $ab+a^2b^2=0$. Отсюда, с учетом того, что $ab\neq 0$, получаем $ab=-1 \Rightarrow a\cdot|b|=1$. Но a и $|b|$ как раз и есть расстояния от вершин острых углов до оси Oy.

10.4. Поскольку $AA_1A_2A_3$ – параллелограмм, имеем $A_1A_2 \parallel AC$, то есть треугольники ABC и A_1BA_2 подобны (рис. 7). Пусть h_b – длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины B. Тогда высота треугольника BA_2A_1, проведенная из вершины B, имеет длину h_b-2r, где r – радиус окружности ω. Из подобия получаем, что $A_1A_2 : AC = (h_b-2r) : h_b$. Поэтому, с учетом равенства $AA_3 = A_1A_2$, получаем: $S(ABA_3)=\frac{1}{2}h_b\cdot\frac{h_b-2r}{h_b}\cdot AC$, то есть $S(ABA_3)=S-\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot AC = S-r\cdot AC$, где S – площадь треугольника ABC. Записав аналогичные равенства, мы получим: $S(ABA_3)+S(BCB_3)+S(CAC_3)=3S-r(AB+BC+CA)=3S-2S=S$.

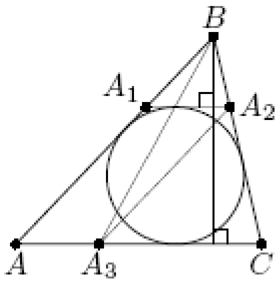


Рис. 7

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что окружность ω является вневписанной для треугольника A_1BA_2, поэтому коэффициент подобия треугольников A_1BA_2 и ABC равен $\frac{r}{r_b}$, где r_b – радиус вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Отсюда $S(ABA_3)=\frac{AA_3}{AC}S=\frac{r}{r_b}S$. Значит, сумма площадей данных трёх треугольников равно $\frac{r}{r_a}S+\frac{r}{r_b}S+\frac{r}{r_c}S=S$ (последнее равенство следует из того, что $S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$).

10.5. Ответ. Второй.

Положим $n=100$. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до n^2, взяв в пару к числу k число n^2+1-k. Заметим, что суммы чисел во всех парах равны n^2+1. Теперь, если первый игрок ставит какое-то число в любую клетку таблицы, то второй игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно средней вертикали (вертикальной оси симметрии таблицы). Несложно заметить, что второй игрок всегда сможет сделать такой ответный ход.

Действуя таким образом, он добьется того, что в каждой из строк сумма чисел будет равна $\frac{n}{2}(n^2+1)$. То есть он добьется того, что $A=\frac{n}{2}(n^2+1)$. Осталось заметить, что сумма чисел во всей таблице равна $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Поэтому в каком-то столбце сумма чисел будет не меньше $\frac{n}{2}(n^2+1)$ (иначе сумма чисел во всей таблице будет меньше $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$). Значит, $B \geq \frac{n}{2}(n^2+1) = A$, и второй игрок выиграет.

11 класс

11.1. Предположим, что оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны, то есть $4(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) < 0$ и $4(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) < 0$, откуда $\sin^2\alpha < \sin^2\beta$ и $\cos^2\alpha < \cos^2\beta$. Сложив эти неравенства, получаем $1 < 1$. Противоречие.

11.2. Ответ. Нельзя.

Предположим, что числа получилось расставить требуемым образом. Заметим, что сумма любых пяти чисел от 1 до 100 больше 2, поэтому если какая-то сумма пяти чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Пусть по кругу подряд стоят числа a, b, c, d, e, f. Тогда числа $a+b+c+d+e$ и $b+c+d+e+f$ – простые нечетные. Но тогда их разность, равная $a-f$ будет четной как разность двух нечетных чисел. Отсюда следует, что числа a и f имеют одинаковую четность. Таким образом, любые два числа, стоящие через четыре, имеют одинаковую четность.

Занумеруем числа по кругу. Тогда числа с номерами 1, 6, 11, …, 96 будут иметь одинаковую четность. Аналогично, числа в каждой из групп: с номерами 2, 7, 12, …, 97, с номерами 3, 8, 13, …, 98, с номерами 4, 9, 14, …, 99 и с номерами 5, 10, 15, …, 100 будет иметь одинаковую четность. Таким образом, мы получили 5 групп по 20 чисел, в каждой из которых числа имеют одинаковую четность. Значит, по кругу стоит $20k$ четных и $20m$ нечетных чисел. Но среди чисел от 1 до 100 ровно 50 четных и 50 нечетных. Противоречие.

11.3. Пусть $y = kx + b$ – уравнение особой прямой, проходящей через точки A и B, которые имеют координаты $A(x_1; ax_1^2), B(x_2; ax_2^2)$. Тогда, во-первых, x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 = kx + b$, и по теореме Виета их произведение равно $-b/a$. Во-вторых, из перпендикулярности векторов $\overline{OA} = (x_1; ax_1^2)$ и $\overline{OB} = (x_2; ax_2^2)$ следует равенство нулю их скалярного произведения, то есть $x_1x_2 + a^2x_1^2x_2^2 = 0$, откуда с учетом условия

$x_1x_2 \neq 0$ получаем $a^2x_1x_2 = -1$. Но, как было показано выше, $x_1x_2 = -b/a$. Значит, $ab = 1$. Это означает, что $b = \dfrac{1}{a}$, то есть все особые прямые $y = kx + b$ проходят через точку $K\left(0; \dfrac{1}{a}\right)$.

11.4. Пусть ребра пирамиды есть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, а также $SA = a_1$, $SB = b_1$, $SC = c_1$. По свойству биссектрисы треугольника $\dfrac{BS}{BA} = \dfrac{SA_1}{AA_1} = \dfrac{CS}{CA}$. Значит, $BS \cdot CA = CS \cdot BA$, то есть $b \cdot b_1 = c \cdot c_1$. Аналогично получаем, что $b \cdot b_1 = c \cdot c_1 = a \cdot a_1$. Пусть $SH = h$. Возводя доказываемое неравенство в квадрат, получаем, что нам нужно доказать неравенство $a^2(a_1^2 - h^2) < b^2(b_1^2 - h^2) < c^2(c_1^2 - h^2)$, если $a > b > c$. Но это неравенство сразу следует из того, что $a^2a_1^2 = b^2b_1^2 = c^2c_1^2$.

11.5. Ответ. Первый.

Положим $n = 111$. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он разобьет на пары все числа от 1 до $n^2 - 1$, взяв в пару к числу k число $n^2 - k$. Заметим, что суммы чисел во всех парах равны n^2.

Первым ходом первый игрок поставит число n^2 в центральную клетку таблицы. Назовем строку и столбец, содержащие эту клетку, *центральными*. Теперь, если второй игрок ставит какое-то число в клетку таблицы не в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной строки. Если же второй игрок ставит какое-то число в клетку таблицы в центральной строке, то первый игрок должен поставить парное число в клетку, симметричную относительно центральной клетки таблицы. Несложно заметить, что первый игрок всегда сможет сделать такой ответный ход.

Действуя таким образом, он добьется того, что в каждом из столбцов стоят пары чисел с суммой n^2 и одно число из центральной строки. Во всех клетках центральной строки, кроме центральной, стоят натуральные числа, меньшие n^2. Поэтому сумма чисел в центральном столбце будет равна $\dfrac{n-1}{2}n^2 + n^2$, а в каждом столбце, кроме центрального, сумма будет меньше, чем в центральном. Поэтому $B = \dfrac{n-1}{2}n^2 + n^2$. Осталось заметить, что сумма чисел в центральной строке будет равна $\dfrac{n-1}{2}n^2 + n^2$. Значит, $A \geq \dfrac{n-1}{2}n^2 + n^2 = B$, и первый игрок выиграет.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В.,Кукина Е.Г.,Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.
Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.
Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.
Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.
Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/